Il controllo semantico sui testi matematici all'inizio dell'università

Semantic control over mathematical texts in freshmen year

Pier Luigi Ferrari
Università del Piemonte Orientale, Italia

Sunto / Questo lavoro si sforza di andare oltre il dibattito, a volte ideologico, a volte superficiale, sul ruolo del linguaggio e della competenza linguistica nell'educazione matematica. Partendo dai risultati di una prova di verifica delle competenze iniziali per un campione di diverse centinaia di studenti di area scientifica, viene proposta una prima interpretazione di alcune delle difficoltà linguistiche degli studenti in contesto matematico.

Parole chiave: linguaggio; controllo semantico; competenza linguistica; matricole universitarie; educazione matematica.

Abstract / This paper tries to move beyond the current debate on the role of language and linguistic competence in Mathematics education, which sometimes is ideological or elusive. Starting from the outcomes of a placement test aimed at the assessment of students' competences in scientific language and Mathematics' notations, the paper provides a first attempt interpretation of some of students' linguistic difficulties in mathematical setting.

Keywords: language; semantic control; linguistic competence; freshman university students; Mathematics education.

1 Premessa

La rilevanza del linguaggio nei processi di insegnamento/apprendimento della matematica è ampiamente riconosciuta, sia sul piano dei curricoli sia su quello della ricerca. In Italia, le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo (MIUR, 2012), ad esempio, mettono in luce che:

> «La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio matematico».
>
> (MIUR, 2012, p. 49)

Negli ultimi anni sono state ampiamente sviluppate, sperimentate e studiate pratiche didattiche in matematica basate sulla comunicazione. Di pari passo, una parte non indifferente delle ricerche presentate nei convegni internazionali di educazione matematica è dedicata allo studio del ruolo della comunicazione nell'apprendimento. Tuttavia, nonostante questa mole di esperienze e ricerche, il tema della *competenza linguistica* in relazione all'educazione matematica non ha mai ricevuto molta attenzione e solo in alcuni casi le caratteristiche dei linguaggi usati nelle pratiche matematiche sono state studiate in profondità. In molte ricerche sembra esserci l'assunzione nascosta che esista una base di competenza linguistica condivisa sufficiente per sviluppare il discorso matematico, e che le difficoltà siano al più dovute a eccessi di formalismo nei testi matematici. La locuzione "linguaggio naturale", ampiamente abusata in educazione matematica, rappresenta abbastanza fedelmente tale assunzione.

Anche le discussioni che ogni tanto compaiono nei mezzi di comunicazione difficilmente affrontano il tema della competenza in termini scientifici. Anche la "lettera dei seicento" (AA.VV., 2017) che ha avuto una certa risonanza in Italia nel 2017, pur esprimendo preoccupazioni in parte condivisibili, non sembra partire da un'analisi aggiornata delle difficoltà degli studenti. A proposito di carenze linguistiche, la lettera sembra collocarle soprattutto nella grammatica, nella sintassi e nel lessico, e chiede di rivalutare il tema della correttezza ortografica e grammaticale. Le azioni che vengono suggerite sono coerenti con questa interpretazione.

La mia esperienza di insegnamento in corsi di matematica di base all'inizio dell'università mi suggerisce da un lato che una base di competenza linguistica condivisa non esiste, così come non esiste il "linguaggio naturale", per lo meno in un contesto educativo, dall'altro che le difficoltà linguistiche, che innegabilmente ci sono, possono essere generate da fattori disparati.

Una cattiva interpretazione del testo di un problema, ad esempio, può dipendere da mancanza di competenza linguistica (ad esempio, sul piano del lessico) ma anche dal fatto che il testo non è stato letto, o lo è stato solo parzialmente. Inoltre una cattiva interpretazione può avere come conseguenza comportamenti riconoscibili e coerenti con la medesima, ma anche, più frequentemente, la scelta di non rispondere, o di rispondere a caso. Questi ultimi tipi di comportamento rendono difficile risalire alle difficoltà linguistiche che li hanno generati.

Anche gli errori in fase di produzione possono essere interpretati diversamente. Un esempio è il seguente. Qualche tempo fa in una prova scritta alcuni studenti hanno usato impropriamente la parola "flesso" per indicare un punto di minimo di una curva. Nel caso di una studentessa straniera si trattava di un errore lessicale puro e semplice: la studentessa semplicemente non conosceva il significato italiano della parola, ed è stato sufficiente segnalarle l'errore per metterla in condizione di non ripeterlo più. Gli altri casi riguardavano studenti italiani che probabilmente avevano usato la parola "flesso" in base all'accezione quotidiana.[1] Questo può essere legato ai loro atteggiamenti nei confronti del linguaggio piuttosto che alla loro competenza lessicale. Gli errori legati agli atteggiamenti sono in genere più difficili da superare e richiedono comunque strategie didattiche completamente diverse. 1

Vi sono poi studenti che pur possedendo un discreto bagaglio linguistico non lo usano in contesto matematico, e studenti che scrivono in modo apparentemente corretto e appropriato ma senza il controllo del significato di quello che scrivono. Quest'ultimo fenomeno è molto comune fra le matricole universitarie. Questo accade sia in fase di interpretazione, come quando lo studente non coglie il valore delle varie parti del testo, sia in fase di produzione, come quando produce testi apparentemente senza senso o senza scopo. Il fenomeno è ancora più vistoso quando si tratta di controllare espressioni simboliche o rappresentazioni figurali. È evidente che la mancanza di controllo sui significati è un ostacolo anche per qualunque strategia mirata al recupero.

1. In effetti, se uno "flette" con le mani del filo di ferro ottiene una forma che assomiglia a un massimo o un minimo più che a un flesso.

In questo contributo affronto il problema del controllo semantico, soprattutto in relazione alle espressioni simboliche, e illustro alcuni dati che possono essere utili per individuare le radici linguistiche delle difficoltà, con lo scopo di contribuire alla costruzione di interpretazioni precise dei comportamenti linguistici degli studenti, che vadano al di là delle interpretazioni ideologiche o superficiali.

L'attuale ordinamento dei corsi universitari prevede una prova in ingresso per la valutazione delle competenze iniziali (test competenze). Da alcuni anni la prova svolta per i corsi del Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica (DiSIT) dell'Università degli Studi del Piemonte Orientale include alcuni item relativi alla comprensione e completamento di testi. A partire dall'a.a. 2017/18 l'intera prova (20 item) è stata dedicata alla comprensione e al completamento di testi verbali e all'uso dei sistemi semiotici usati in matematica (notazioni simboliche, figure, grafici). Questi materiali non sono sufficienti a dare un quadro completo della situazione, in quanto manca la produzione di testi, che viene spesso richiesta agli studenti, in sede di esami scritti o orali, di prove intermedie o di esercitazioni, per spiegare i loro procedimenti risolutivi o per illustrare alcuni concetti. Tuttavia possono contribuire a delineare alcuni punti critici.
Va comunque premesso che la mancanza di competenze linguistiche può avere diverse influenze sull'apprendimento matematico. In alcuni casi errori o imprecisioni nell'interpretazione o nella produzione dei testi non hanno conseguenze pratiche. In altri casi hanno effetti rilevabili (come il fraintendimento del testo di un problema o la produzione di una risposta o di una motivazione inadeguata). In altri ancora, come accennato in precedenza, possono avere l'effetto non rilevabile di dissuadere gli studenti dal tentare di risolvere un problema o dal produrre un testo quando richiesti. Questi ultimi casi sono i più difficili da individuare, classificare e affrontare e, probabilmente, per questi motivi, i più gravi.

2 Le caratteristiche del linguaggio della matematica

Quando uso la locuzione "linguaggio della matematica" intendo riferirmi, in accordo con Morgan (1998), a tutte le rappresentazioni semiotiche utilizzate nel fare e nel comunicare matematica. Quindi non solo le notazioni simboliche ma anche i testi verbali e le rappresentazioni figurali.
Per quanto riguarda queste ultime, nonostante l'opinione comune contraria, non va dato per scontato che l'uso che se ne fa in matematica (e in altre discipline) sia assimilabile all'uso quotidiano. Le funzioni di molte delle rappresentazioni figurali il cui uso è sempre più diffuso nella vita quotidiana è quello di comunicare significati in modo tale da consentirne l'immediata interpretazione senza bisogno di inferenze (o di controllo concettuale). Questo vale per un'ampia gamma di rappresentazioni, dai segnali stradali agli emoticon. Le rappresentazioni figurali della matematica richiedono invece inferenze (ad esempio, l'interpretazione di un grafico in termini numerici) e l'interpretazione che salta in mente per prima non è necessariamente quella corretta. Ad esempio, la figura sotto a sinistra è una parte del grafico a destra e non, come potrebbe sembrare a prima vista, una porzione del grafico di una parabola. Questo tema è stato discusso più ampiamente da Ferrari (2014).

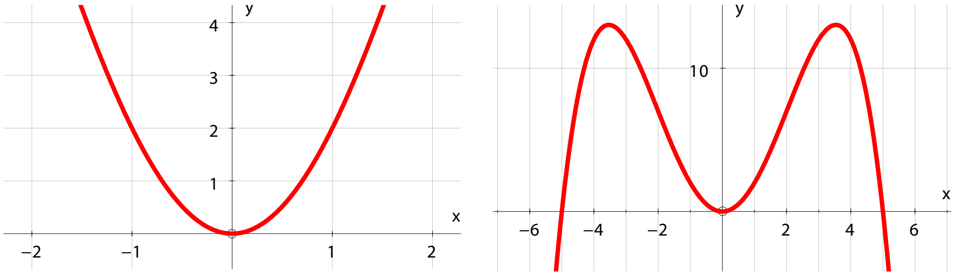

Figura 1
Parabola o quartica?

Per quanto riguarda la componente verbale, le specificità del linguaggio della matematica non riguardano il solo lessico ma anche l'organizzazione dei testi, come osservato, in un contesto più generale, da Halliday (2004). Morgan (1998) e Ferrari (2004) hanno utilizzato strumenti della linguistica funzionale, e in particolare l'idea di registro *linguistico* come varietà linguistica relativa all'uso per caratterizzare il linguaggio della matematica.[2] Ferrari (2004; 2006) ha mostrato che i registri utilizzati in matematica condividono, in forma estrema, molte caratteristiche dei registri colti, e ha messo in luce come alcuni comportamenti degli studenti derivino dall'uso di registri colloquiali per interpretare o produrre testi matematici. Vi è comunque un'ampia gamma di comportamenti linguistici sempre più diffusi, come l'uso improprio della punteggiatura descritto da Demartini (2016), che potrebbero risultare incompatibili con l'alto livello di esplicitazione tipico del linguaggio della matematica.

3 Linguaggio e matematica: il controllo semantico

Il controllo semantico è definito da Ferrari (2001) come la capacità di interpretare e manipolare propriamente le espressioni simboliche e gli enunciati in gioco in un compito matematico come testi da interpretare piuttosto che come contenitori di parole chiave o di altri indizi. Nel caso della risoluzione dei problemi questo significa riconoscere che lo scopo principale degli enunciati (compresi quelli in forma simbolica) è la descrizione delle situazioni problematiche piuttosto che l'innesco di specifici comportamenti o procedimenti. Il controllo semantico è anche collegato (anche se non equivalente) a una qualche capacità di spiegare la propria strategia risolutiva. A questa definizione è opportuno aggiungere le rappresentazioni figurali (grafici, diagrammi, figure geometriche ecc.) a testi verbali e simbolici, in quanto oggi non ci sono ragioni per ritenere che le immagini siano meno problematiche delle altre forme di rappresentazione.
Per mettere in luce il controllo semantico (o la sua mancanza) è necessario prima di tutto individuare situazioni problematiche che richiedano il riferimento puntuale ai significati del testo per costruire una strategia risolutiva e limitino la possibilità di raggiungere soluzioni corrette in modi diversi. Questo accade, ad esempio, se la

2. La definizione di registro come varietà linguistica in relazione all'uso è stata sviluppata da Halliday e Hasan (1976) e applicata alla matematica da Morgan (1998) e Ferrari (2004; 2006; 2011). Questa accezione, che è largamente la più diffusa, differisce da quella usata da Duval (1995). Per Duval "registro" è sinonimo di "sistema semiotico".

selezione della strategia o la sua applicabilità dipendono da qualche parametro che compare nel testo del compito, o se il compito mette in gioco rappresentazioni che, pur essendo pienamente note e accessibili, differiscono da quelle in cui gli studenti sono abituati a operare.
Questo lavoro si focalizza sull'interpretazione delle espressioni simboliche e sugli intrecci fra le medesime, il linguaggio verbale e le rappresentazioni figurali. Saranno presentati alcuni esempi di difficoltà nell'interpretazione, nella conversione e nel trattamento di espressioni simboliche. Alcune di queste difficoltà possono essere collegate anche a mancanza di competenze, o addirittura di conoscenze matematiche. Tuttavia in tutti questi casi c'è un legame, più o meno evidente, con difficoltà linguistiche. Lo scopo del lavoro è formulare alcune ipotesi sulle possibili radici linguistiche dei comportamenti analizzati, nell'ottica di avere idee più precise sul tipo di competenza linguistica da costruire in continuità verticale dalla scuola elementare alla scuola media superiore.

4 Metodologia

In questa sezione cerco di delineare alcune delle ragioni per cui non è possibile l'applicazione diretta alla ricerca sul ruolo della competenza linguistica nell'apprendimento della matematica di alcune delle metodologie diffuse nella ricerca in educazione matematica.
Per prima cosa, il focus dovrebbe essere non solo sulla competenza lessicale, grammaticale o sintattica ma soprattutto sulla capacità di interpretare testi scientifici e produrne di adeguati. Questo esclude la possibilità di usare esercizi puntuali e richiede di mettere in gioco testi lunghi, come accade del resto da diversi anni nelle prove di lingua italiana dell'INVALSI. L'uso di testi lunghi, specie in contesto universitario, crea problemi in relazione al fattore tempo, e anche agli atteggiamenti degli studenti, che molto spesso sbagliano l'interpretazione di un testo semplicemente perché non lo leggono. Più in generale, i problemi linguistici che emergono in contesto matematico possono derivare da mancanza di competenze linguistiche o dalla mancata applicazione di competenze linguistiche esistenti.
Anche un lavoro di media durata con piccoli gruppi sperimentali presenta grosse difficoltà, in quanto all'università i gruppi devono essere formati su base volontaria. In genere gli studenti disposti a fare un lavoro aggiuntivo sono i più motivati, e di solito in questi casi il lavoro dà ottimi risultati che però sono poco significativi, in quanto gli studenti che hanno problemi sono altri. Se si adescano studenti più deboli con promesse di facilitazioni in sede di esame si rischia di radunare persone non interessate a svolgere il lavoro seriamente, con conseguenze negative. Ovviamente mi riferisco a studenti di corsi di base del I anno di corsi di laurea di area scientifica con elevato numero di iscritti. Anche la pratica di intervistare gli studenti dopo la produzione di un testo scritto, per cercare di ricostruire il loro processo di pensiero, sulla base delle indicazioni di Ericsson & Simon (1984) non è sempre fruttuosa. Nella maggior parte dei casi gli studenti intervistati non sono in grado di ricostruire il loro pensiero e tendono ad attribuire le loro risposte a fattori ritenuti fuori controllo (ad esempio l'agitazione). Non ultimo, c'è il fattore tempo: in alcuni casi quello che è rilevante, nella costruzione di un processo di pensiero non è tanto il fatto di riuscire a interpretare

un testo o una formula quanto il tempo e lo sforzo richiesti. Uno studente che abbia sistematicamente bisogno di svolgere dei calcoli, investendo tempo, per capire che 77 è multiplo di 7 o che l'espressione $x^2 - x$ si annulla per $x = 0$ ha minori possibilità di utilizzare questi fatti per costruire un ragionamento.
Alcuni dei comportamenti descritti in precedenza, come l'uso di registri colloquiali o le improprietà nella punteggiatura spesso non pregiudicano i processi comunicativi. In matematica ci sono imprecisioni innocue e altre che possono avere conseguenze negative. Ad esempio scrivere 2 · –5 invece di 2 · (–5) può non avere conseguenze negative, mentre le ha probabilmente scrivere 5 + 2 · 3 invece di (5 + 2) · 3.
Per queste ragioni è necessario usare problemi che mettano a nudo alcuni punti critici dell'uso del linguaggio e delle rappresentazioni in matematica e provare a dare delle prime interpretazioni. Una volta individuato un insieme di problemi con le caratteristiche indicate verranno confrontati i risultati del problema originario con quelli di varianti in cui le difficoltà linguistiche ipotizzate come fattori di insuccesso vengono neutralizzate. In alcuni dei problemi illustrati negli esempi vengono delineate alcune possibilità di costruire varianti significative. Nel frattempo è necessario anche mettere in piedi un meccanismo di interviste puntuali da svolgere immediatamente dopo le prove. Questo, ovviamente, richiede la pianificazione della didattica in modo da offrire l'opportunità di incontrare gli studenti.

5 Esempi

Quasi tutti gli esempi provengono dal test di verifica delle competenze iniziali svolto presso il Dipartimento di Scienze e Innovazione Tecnologica dell'Università del Piemonte Orientale nelle sedi di Alessandria e Vercelli, negli anni accademici 2016/17 e 2017/18. La prova consiste in un quiz di 20 item sulla piattaforma Moodle e viene svolta nei laboratori informatici del dipartimento.

Esempio 1
Nell'item che segue era dato in un diagramma cartesiano un punto di coordinate $(x\,;y)$, con x negativo, e gli studenti erano richiesti di collocare un altro punto le cui coordinate erano il risultato di trasformazioni delle coordinate del primo.

Nel diagramma è rappresentato (in rosso) il punto di coordinate $(x;y)$.
Trascina l'etichetta B in modo che corrisponda (col circolino in altro a sinistra) al punto di coordinate $(2x;\, y - 1)$.

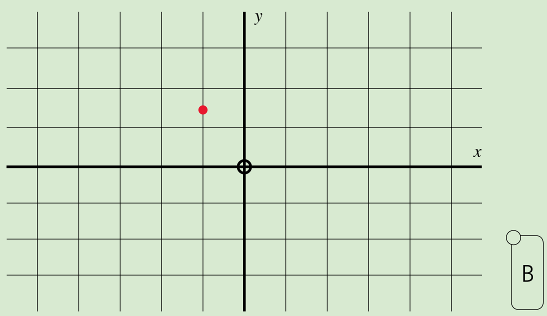

Figura 2
Trasformazioni sulle coordinate.

In questo item il sistema accettava come risposte corrette i punti compresi in un cerchio centrato sul punto esatto e di raggio 5 mm. Nei vari turni della prova sono state presentate diverse varianti di questo problema.
In questo caso particolare, affrontato da 233 matricole del dipartimento, prevalentemente iscritte a Scienze Biologiche, le risposte corrette sono state il 40%. Tra le risposte scorrette prevalgono i punti collocati nel I quadrante (36%). Quasi tutte queste risposte sono date da punti con ascissa approssimativamente uguale a $-2x$. Sembra che più di uno studente su tre sia messo in difficoltà dal fatto che un punto con ascissa x si trovi nel II quadrante, in altre parole che abbia ascissa negativa pur senza un segno "–" in vista. Altri esempi di risposte sbagliate sono punti collocati sull'asse delle y (4%), punti di coordinate $(2x; -y)$ (6%), punti con ascissa $3x$ (2%). Questi risultati possono essere ascritti a un'insufficiente comprensione dei concetti di base della geometria analitica o alla difficoltà di operare conversioni tra i sistemi semiotici in gioco (notazioni simboliche e rappresentazioni nel piano). Tuttavia la difficoltà ad accettare come negativo il valore di una lettera in assenza del segno "–" davanti fa pensare a strategie di lettura basate sulla ricerca di parole-chiave (o segni-chiave) senza alcun tentativo di operare inferenze anche semplici (in altre parole: senza interpretare compiutamente il testo e la figura). Nelle sessioni successive della prova accanto a problemi di questo tipo sono state proposte varianti in cui il punto $(x;y)$ si trova nel primo quadrante, in modo da verificare se la difficoltà sta davvero nell'assegnare valori negativi a una lettera. I risultati di questi esperimenti sono in fase di elaborazione.

Esempio 2
Consideriamo il problema, presentato in due varianti a gruppi diversi di matricole, in anni diversi.
Determinate il dominio della funzione

Variante A	Variante B
$f(x) = \dfrac{x}{2+\sin x}$	$f(x) = \dfrac{x}{2-\sin x}$

Le due varianti sono matematicamente equivalenti, in quanto entrambi i denominatori assumono valori nell'intervallo $[1,3]$. Nonostante questo, la variante A ha ottenuto sistematicamente, in tutte le edizioni, percentuali di successo significativamente più alte della B. Anche qui sembra che la presenza di un segno "–" influenzi l'interpretazione dell'espressione $2 - \sin x$ rendendola "meno positiva" dell'altra. Questi comportamenti sono adottati anche da studenti che a posteriori riconoscono che entrambe le relazioni

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$-1 \le -\sin x \le 1$$

sono vere, e sono quindi in grado di ricavare, sommando 2 a tutti i termini, nei due casi:

$$1 \le 2+\sin x \le 3$$
$$1 \le 2-\sin x \le 3$$

Esempio 3

Fenomeni analoghi si verificano anche con termini del linguaggio verbale. Ad esempio, consideriamo il problema:

Tra i grafici A, B riportati sotto uno corrisponde, nell'intervallo visualizzato, alla derivata della funzione g rappresentata al centro. Quale? Motiva.

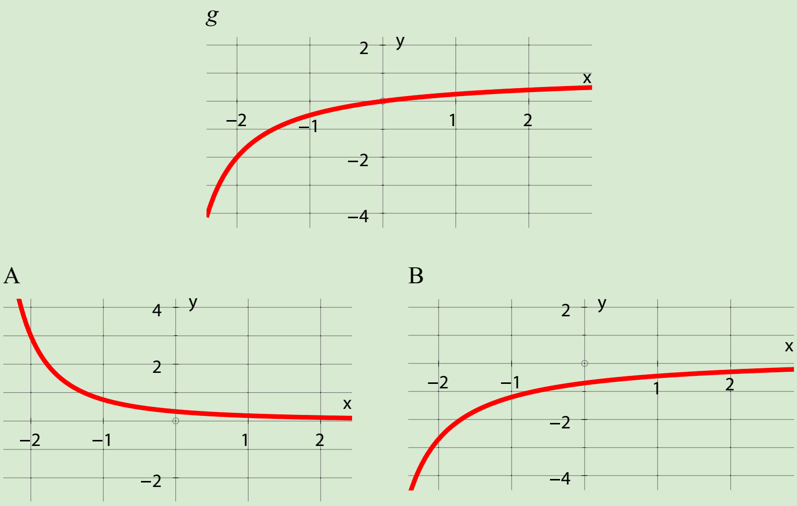

Figura 3
Dal grafico di una funzione a quello della derivata.

Problemi di questo tipo (tratti da esami scritti di matematica per Scienze biologiche e non dal test iniziale) sono stati assegnati per oltre un decennio alle matricole del dipartimento, nel formato a risposta aperta. In tutte le prove si è individuato un numero significativo di soggetti che hanno scelto un grafico del tipo B con la motivazione "g è crescente, quindi anche la sua derivata è crescente", oppure hanno scartato A con motivazioni del tipo "il grafico A è tutto positivo mentre g è anche negativa". In altre parole c'è uno zoccolo duro che sembra applicare pseudo-teoremi come "se la funzione g è crescente [decrescente, positiva, negativa, pari, dispari], allora anche la sua derivata g' è crescente [decrescente, positiva, negativa, pari, dispari]". Questi comportamenti sono tipici degli studenti meno coinvolti nell'attività didattica (lezioni, tutorati) e, anche per questo, non sono facilmente emendabili. Come spesso accade quando si studiano gli intrecci fra matematica e lingua, le interpretazioni possibili sono almeno due. È possibile che la difficoltà riguardi soprattutto la competenza matematica e alcuni degli studenti che adottano questi modelli siano davvero convinti che tali proprietà matematiche siano valide. Oppure è possibile che alcuni studenti (per ragioni che possono essere riferite a mancanza di competenza ma anche ad altri piani, come emozioni o atteggiamenti) semplicemente non cerchino di interpretare la situazione problematica ma si limitino a cercare associazioni tra alcune parole estratte in qualche modo dal testo. La relativa robustezza di questi modelli di risposta fa pensare che la seconda interpretazione sia la più produttiva.
Esempi analoghi sono dati dai numerosi soggetti (fino al 70% delle matricole) che ritengono (in item a scelta multipla) che un prezzo aumentato del 300% sia stato triplicato, o che uno triplicato sia stato aumentato del 300%. Anche in questi casi l'associazione superficiale fra i termini "300%" e "triplicato" prevale sull'interpretazione della situazione problematica.

Esempio 4

In altri casi il testo non viene interpretato ma gioca il ruolo di attivatore di algoritmi. Un classico sono tutti i problemi che richiedono di stabilire il dominio di funzioni come $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$.

Sia nel formato a risposta aperta su supporto cartaceo, sia in quello a scelta multipla online vi sono numeri significativi di soggetti che non riconoscono che x^2+2 è positiva per ogni valore reale di x, ma individuano o scelgono risposte come $x\neq-\sqrt{2}$, $x\neq\sqrt{-2}$, $x\neq\pm\sqrt{2}$, $x\neq\sqrt{\pm 2}$. Tali risposte sembrano originare dall'applicazione di algoritmi in assenza di controllo semantico sulle espressioni. Nelle sessioni successive della prova accanto a problemi di questo tipo sono state proposte varianti in cui il denominatore è una funzione a valori positivi ma non un polinomio di II grado (come ad esempio $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ oppure $f(x)=\frac{1}{x^4+3x^2+2}$), in modo da verificare se è la disponibilità di algoritmi scolastici (come nel caso dei polinomi di secondo grado) che innesca l'esecuzione di algoritmi fuori controllo.

Esempi 5 – 6

Il problema che segue (esempio 5) è stato quasi sempre presentato nel formato a scelta multipla.

Se una delle espressioni elencate sotto è equivalente a "il prodotto del quadrato della differenza di x e y per la somma dei quadrati di x e y" sceglila, altrimenti scegli la voce "Nessuna delle espressioni proposte è equivalente".

(a) $(x-y)^2\cdot(x^2+y^2)$
(b) $(x-y)^2\cdot(x+y)^2$
(c) $(x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)$
(d) $(x^2-y^2)\cdot(x+y)^2$
(e) Nessuna delle espressioni proposte è equivalente

Problemi di questo tipo sono stati assegnati ripetutamente negli ultimi anni nei test di verifica delle competenze iniziali del DiSIT. Se la risposta corretta è una delle espressioni proposte le percentuali di successo oscillano tra 75% e 85%. Se invece la risposta corretta è "Nessuna delle espressioni proposte è equivalente", allora le percentuali si collocano fra 60% e 70%.

Percentuali di successo analoghe, leggermente ritoccate verso il basso, sono tipiche di problemi come il seguente (esempio 6), che richiede una conversione inversa rispetto al problema precedente.

Se una delle descrizioni elencate sotto è equivalente all'espressione

$$2\cdot(n^3+1)$$

sceglila, altrimenti scegli la voce "Nessuna delle descrizioni proposte è equivalente".

(a) Nessuna delle descrizioni proposte è equivalente
(b) Il cubo del successivo del doppio di n
(c) Il cubo del doppio del successivo di n
(d) Il doppio del cubo del successivo di n
(e) Il successivo del cubo del doppio di n

Anche problemi di questo tipo sono stati assegnati negli ultimi anni nei test di verifica delle competenze iniziali del DiSIT. Se, come in questo esempio, la risposta corretta è "Nessuna delle descrizioni proposte è equivalente", le percentuali di successo oscillano fra 45% e 60%. Se invece la risposta corretta è la descrizione di un procedimento (come i distrattori (b), (c), (d), (e) di questo esempio) le percentuali variano in genere da 65% a 80%.
Problemi di questo tipo mettono in gioco *conversioni* fra sistemi semiotici. Quello che è richiesto è riconoscere l'ordine delle operazioni espresso in un sistema semiotico e associarlo a un'espressione di un altro sistema che esprime lo stesso ordine, se questa esiste. Sul versante del linguaggio verbale si tratta di ricostruire la struttura di un gruppo nominale. Nel caso dell'esempio 6 la struttura del termine è lineare, in quanto ciascun nome regge al più un complemento e i nomi che compaiono funzionano come operatori unari.
Questo è esplicito nella versione verbale, ma non altrettanto in quella simbolica dove "doppio" e "successivo" sono realizzati attraverso gli operatori binari di prodotto e somma. Nell'espressione verbale il primo operatore da sinistra è quello che va applicato per ultimo ("doppio"), mentre l'ultimo è quello che va applicato per primo ("cubo"). Se si esprimesse lo stesso termine come una sequenza di istruzioni (o, se si preferisce, in uno stile verbale), l'ordine sarebbe quello opposto: "Pensa un numero. Calcola il suo cubo. Calcola il numero successivo. Raddoppia il risultato."
Nell'espressione simbolica

$$2 \cdot (n^3+1)$$

il primo operatore che si incontra da sinistra [2] è ancora quello che va applicato per ultimo, ma il secondo [n^3] è quello che va applicato per primo, e il terzo [+1] quello che va applicato per secondo. Questa differenza dipende dal fatto di usare due operatori [prodotto e somma] con notazione infissa (cioè con l'operatore collocato fra i due argomenti) e uno [cubo] in notazione suffissa (cioè con l'operatore collocato dopo gli argomenti) e dalle regole di priorità degli operatori. In italiano la struttura è più semplice, in quanto le parole che hanno funzione di operatore quasi sempre precedono quelle che hanno la funzione di argomento.
Nell'esempio 5 la situazione è un poco più complessa in quanto gli operatori in gioco sono quattro, di cui tre binari ("prodotto", "differenza", "somma") e uno unario ("quadrato") che nell'espressione verbale compare due volte, una al singolare e una al plurale. L'aumento della complessità è più sensibile sul versante dell'espressione verbale. Per comprendere la struttura di un'espressione come "il prodotto del qua-

drato della differenza di x e y per la somma dei quadrati di x e y" è necessaria una certa competenza sintattica e semantica: bisogna riconoscere che gli argomenti del prodotto sono di un termine complesso che inizia con "quadrato" e un altro termine complesso che inizia con "la somma". Per fare questo è necessario sapere che si fa il prodotto *di* qualcosa *per* qualcos'altro, mentre si fa la somma e la differenza *di* qualcosa e qualcos'altro. Inoltre bisogna capire che "la somma dei quadrati di x e y" è un'abbreviazione per "la somma del quadrato di x e del quadrato di y".
In item come questi sembrano avere un certo peso il fattore tempo e anche gli atteggiamenti degli studenti. Alcune categorie di studenti, più sicuri sugli item più strettamente matematici tendono a rispondere frettolosamente agli item come quelli che stiamo discutendo, e viceversa. Il fattore tempo e il contratto didattico spiegano anche le inferiori percentuali di successo nei casi in cui la risposta corretta è "Nessuna delle descrizioni proposte è equivalente". Anche di questo problema sono state preparate diverse varianti, che coinvolgono diverse funzioni e diversi tipi di notazione. Alcune di queste sono state testate nelle prove successive a quelle considerate in questo lavoro e i risultati sono in fase di elaborazione.

Esempio 7
Il problema seguente è stato affrontato nel test di verifica delle competenze iniziali da 134 matricole del dipartimento nella sede di Alessandria.

Considera la relazione

$(a+b)^2 = a^2+b^2$

Quale delle seguenti voci descrive tutti e soli i valori per i quali la relazione è verificata?

(a) $a=0$ oppure $b=0$
(b) $a=0$ e $b=0$
(c) Nessun valore di a e b
(d) Tutti i valori di a e b
(e) a e b entrambi positivi

Di seguito l'analisi delle risposte (134 partecipanti)

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	NR
N°	33	12	28	28	28	5
%	25%	9%	21%	21%	21%	4%

Consideriamo anche la seguente variante del problema, assegnata a 233 matricole del dipartimento nella sede di Vercelli.

Considera la relazione

$(a-b)^2 = a^2+b^2$

Quale delle seguenti voci descrive tutti e soli i valori per i quali la relazione è verificata?

(a) $a=0$ oppure $b=0$
(b) $a=0$ e $b=0$
(c) Nessun valore di a e b
(d) Tutti i valori di a e b
(e) a positivo e b negativo

Di seguito l'analisi delle risposte (233 partecipanti)

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	NR
N°	67	36	44	51	21	14
%	29%	15%	19%	22%	9%	6%

In entrambe le varianti la distribuzione delle risposte fra i distrattori è piuttosto equilibrata. Questi item riguardano un tema affrontato nella scuola secondaria di secondo grado, che tuttavia richiede una qualche interpretazione delle relazioni, ad esempio attraverso sostituzioni di valori numerici.
La risposta (b) può indicare problemi di logica o, meglio, l'uso in contesto matematico di registri colloquiali. Gli studenti che hanno scelto questa risposta potrebbero aver interpretato la congiunzione "e" come connettore debole, senza interpretarlo come congiunzione logica. La (c) può derivare dalla considerazione che la relazione non corrisponde a un'identità appresa e va quindi rifiutata globalmente. La (d) e la (e) mettono in luce gravissime lacune non solo linguistiche (quadrato della somma o somma dei quadrati è la stessa cosa) ma anche sul piano delle competenze matematiche.
Balza agli occhi il netto divario (come percentuali di successo) fra questo problema e quelli immediatamente precedenti. Negli esempi 5 e 6 vi è comunque una maggioranza di studenti che riescono, pur con qualche incertezza, a dare risposte corrette. In questo solo una minoranza di studenti riesce a farlo. Sembrerebbe che davanti a un'espressione simbolica gli studenti siano più abituati a convertirla in un testo verbale o ad associarla a un procedimento che a interpretarla attraverso la sostitu-

zione di valori numerici alle lettere. Naturalmente tutti questi processi comportano difficoltà e rischi, ma l'incapacità di controllare un'espressione attraverso sostituzioni di valori, a scopo di orientamento o di verifica è un ostacolo enorme. Basterebbero poche sostituzioni per verificare che le relazioni dell'esempio 7 non sono identità e anche per individuare la risposta corretta.

6 Discussione

A mio parere i dati più eclatanti sono quelli relativi agli esempi 1 e 7, che mettono in gioco situazioni che richiedono l'applicazione di abilità di base e prive di complicazioni tecniche. Gli esempi 2 e 3, pur documentando gravi lacune linguistiche, sono associati a situazioni matematicamente più complesse che possono aver indotto gli studenti meno preparati a non tentarne l'analisi e a cercare strategie plausibili in assenza di una qualche interpretazione della situazione problematica. Un discorso analogo vale per l'esempio 4, che è comunque un buon esempio di mancanza di controllo semantico, in quanto i soggetti che sbagliano applicano un algoritmo senza che sia necessario e senza rendersi conto che una delle operazioni utilizzate (l'estrazione di una radice quadrata) non è applicabile a numeri negativi. Come per l'esempio 7, poche sostituzioni potrebbero quanto meno insinuare nello studente il sospetto che l'espressione x^2+2 sia positiva per ogni valore reale di x. In quest'ultimo caso la funzione delle sostituzioni non sarebbe quella di produrre controesempi ma di orientare verso ragionamenti appropriati. Negli esempi 5 e 6 le percentuali di insuccesso sono relativamente basse e probabilmente riguardano la fascia più debole di studenti. I dati su questi esempi documentano che l'associazione di un testo verbale a una formula rimane uno degli strumenti più efficaci che gli studenti possono usare per controllarne il significato. C'è una differenza abbastanza netta fra le percentuali di successo nei problemi in cui la risposta corretta è fra le opzioni di scelta e in quelli in cui la risposta da scegliere è "nessuna delle espressioni/descrizioni proposte è equivalente": dal 15% al 20%. Questa fascia potrebbe essere costituita da studenti la cui competenza linguistica permette loro di riconoscere una formulazione adeguata se presente, ma non di accorgersi che non è presente quando questo è il caso. Quest'ultimo processo probabilmente richiederebbe ai soggetti di essere in grado di produrre loro stessi la formulazione corretta e di confrontarla con quelle proposte. Questo comporta una sicurezza sui registri avanzati della lingua (indispensabile per attività di conversione di questo tipo, che mettono in gioco l'organizzazione sintattica) che molti studenti non possiedono. Per questo un numero rilevante di loro sceglie la soluzione che sembra più plausibile, senza prendersi la responsabilità di scartarle tutte. Su questo possono poi pesare abitudini scolastiche e convinzioni.
I dati relativi agli esempi 1 e 7, indicano difficoltà diverse ma non del tutto scollegate. L'esempio 1 (insieme al 2) sembra documentare l'adozione di strategie che sono la controparte simbolica delle strategie di lettura per ricerca di parole chiave. L'assenza del segno "–" rende per molti difficile accettare che una lettera indichi un valore negativo. Esempi come il 7 riguardano la semantica delle espressioni simboliche, che sembra essere molto poco conosciuta agli studenti. Su questo sembrano esserci ampi spazi per attività didattiche semplici ma molto significative, come la ricerca di esempi e controesempi in relazione a espressioni simboliche anche diverse da quelle

scolasticamente più usate.[3] Questo significherebbe andare al cuore del ragionamento matematico, che si basa sulla continua possibilità di verificare o refutare enunciati, piuttosto che sull'applicazione di metodi argomentativi nati in altre discipline e che poco o nulla tengono conto della specificità della matematica e del suo linguaggio. 3

In sintesi, possiamo dire che il controllo semantico sulle espressioni simboliche può avvenire in tre modi: (i) tramite la conversione in enunciati della lingua italiana; (ii) tramite il trattamento che trasforma espressioni in altre più esplicite o meglio conosciute; (iii) tramite l'interpretazione delle espressioni grazie alla sostituzione di valori, nel nostro caso numerici, alle lettere. Il primo processo sembra abbastanza affidabile, anche se richiede una certa competenza nei registri avanzati della lingua italiana, che non tutti gli studenti hanno. Il secondo in qualche caso è abusato, come nello studio di espressioni come x^2+2, ma richiede anche la capacità, purtroppo in declino, di riconoscere velocemente alcune espressioni e le loro proprietà. Il terzo, infine, è largamente quello più trascurato. Presenta poche difficoltà tecniche e può essere sviluppato a qualsiasi livello, ma richiede un atteggiamento diverso nei confronti della lingua, e cioè l'idea che le espressioni di ogni genere sono, prima di tutto, portatori di significati.

A mio giudizio queste considerazioni dovrebbero indurre insegnanti e ricercatori a porsi il problema della competenza linguistica e del suo sviluppo nell'arco educativo e in contesto matematico, rinunciando al mito del "linguaggio naturale". Allo stesso tempo, una prima analisi delle difficoltà sembra sottolineare l'urgenza di promuovere atteggiamenti diversi nei confronti del linguaggio, che inducano gli studenti a considerare le espressioni di ogni genere come portatrici di significato osservabili, interpretabili, modificabili in base a criteri condivisi.

Bibliografia

AA.VV. (2017). *Saper leggere e scrivere: una proposta contro il declino dell'italiano a scuola*. Gruppo di Firenze per la scuola del merito e della responsabilità. Disponibile in http://gruppodifirenze.blogspot.it/ (consultato il 01.01.2018).

MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma. Disponibile in http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/indicazioni_nazionali_infanzia_primo_ciclo.pdf (consultato il 01.01.2018).

Demartini, S. (2016). La grammatica nei testi scritti a scuola. Rilievi dall'analisi del corpus Tiscrivo. In M. Benedetti, C. Bruno, P. Dardano & L. Tronci (A cura di), *Grammatica e Grammatici. Teorie, testi e contesti. Atti del XXXIX Convegno SIG* (pp. 233-238). Roma: Il Calamo.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: sémiotiques registres et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Ericsson, K.A., & Simon, H. A. (1984). *Protocol Analysis. Verbal Reports as Data*. Cambridge (MA): The MIT Press.

Ferrari, P. L. (2001). Understanding Elementary Number Theory at the Undergraduate Level: A Semiotic Approach. In S. R. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and Teaching Number*

3. La teoria elementare dei numeri interi offre diverse opportunità, come lo studio delle proprietà di numeri interi rappresentati dalla loro scomposizione in fattori primi. Un esempio è scoprire, dapprima sperimentalmente e poi argomentando, che per ogni valore intero non negativo di m ed n, $3^m \cdot 5^n$ è dispari e $3^m \cdot 5^n+1$ è pari.

Theory: Research in Cognition and Instruction (pp. 97-115). Westport (CT, USA): Ablex Publishing.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio*. Quadro teorico e idee per la didattica. Bologna: Pitagora.

Ferrari, P. L. (2006). Il ruolo del linguaggio nell'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 29A-B*(6), 611-626.

Ferrari, P. L. (2011). Parlare e far parlare di matematica nella scuola secondaria. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 34A-B*(5), 657-666.

Ferrari, P. L. (2014). Quale aiuto possono dare le tecnologie per l'insegnamento/apprendimento dell'aritmetica e dell'algebra? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 36A-B*(6), 555-574.

Halliday, M. A. K. (2004). *The Language of Science*. London: Continuum.

Halliday, M. A. K., & Hasan, R. (1976). *Cohesion in English*. London: Longman.

Morgan, C. (1998). *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation*. London: Falmer Press.

Autore/Pier Luigi Ferrari
Università del Piemonte Orientale, Italia
pierluigi.ferrari@uniupo.it